

**ЛІТЕРАТУРА**



**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА**

Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний технічний університет імені  
Івана Пулюя

*Кафедра конструювання верстатів,  
інструментів та машин*

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до виконання практичної роботи №1**  
**з курсу «Теорія технічних систем»**  
**Тема: Моделювання технічних систем методом аналізу**  
**розмірностей фізичних величин**

*для студентів напрямів підготовки*  
*6.050502 «Інженерна механіка»,*  
*6.050503 «Машинобудування»*

**Тернопіль, 2016**

Методичні вказівки розроблені у відповідності з навчальними планами напрямів 6.050502 “Інженерна механіка” та 6.050503 “Машинобудування”, а також робочою програмою дисципліни «Теорія технічних систем»

Методичні вказівки розробив:

к.т.н. Крупа В.В.

Рецензент:

к. ф.-м. н, доцент Скоренький Ю.Л.

Методичні вказівки розглянуті і затверджені на засіданні кафедри конструювання верстатів, інструментів та машин

Протокол № 13 від «11» травня 2016 р.

Завідувач. кафедри ВІ \_\_\_\_\_ д.т.н., проф. Луців І.В.

Методичні вказівки рекомендовані до друку на засіданні методичної комісії факультету інженерії машин, споруд та технологій

Протокол № 2 від « 19 » травня 2016 р.

Голова методичної комісії ФМТ \_\_\_\_\_ Капаціла Ю.Б.

**Мета роботи:** освоїти метод аналізу розмірності фізичних величин при моделюванні технічних систем

**Основні завдання:**

1. Вивчити суть методу аналізу розмірностей фізичних величин при моделюванні технічних систем.
2. Ознайомитись з методикою використання та можливостями методу аналізу розмірностей фізичних величин.
3. Навчитись використовувати метод аналізу розмірностей фізичних величин на практиці при розв'язуванні задач.

## **КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

### **1. Характеристика методу аналізу розмірностей фізичних величин**

Об'єм експериментальної роботи безпосередньо залежить від кількості досліджуваних факторів. Для зменшення кількості незалежних змінних досліджувані фактори та показники чи явища можуть бути згруповані в безрозмірні комбінації, загальна кількість яких буде менша ніж кількість вихідних факторів. Методика побудови цих безрозмірних комбінацій ґрунтується на аналізі розмірностей змінних, що впливають на досліджуваний процес. Метод аналізу розмірностей фізичних величин можна ефективно застосовувати у тих випадках, коли на основі прийнятої фізичної моделі складені основні рівняння та встановлено умови єдиності їх розв'язку. Обробка основних рівнянь за допомогою методу аналізу розмірностей величин дозволяє знайти критерії подібності — степеневі комплекси параметрів задачі, об'єднані в одне ціле тими зв'язками, які закладені вже в самій основі відповідного процесу. Цим досягається зменшення кількості фізичних параметрів, які характеризують явище, та більша узагальненість одержуваних результатів.

Досить часто фізичний процес не вдається описати математично. У випадку, коли не має можливості застосувати теорію подібності звертаються до альтернативного підходу — *аналізу розмірностей*. При використанні аналізу розмірностей достатньо знати лише перелік всіх величин, які характеризують

даний процес.

На основі аналізу розмірностей задача моделювання розв'язується за такою схемою:

- визначається тип задачі і вибирається система розмірностей;
- складається перелік величин, які суттєві для досліджуваного явища;
- за  $\pi$ -теоремою визначається число критеріїв-комплексів та їх структура.

При цьому принципове значення мають два моменти: вибір системи розмірностей та перелік суттєвих величин. Обидві проблеми вирішуються тільки на основі достатньо глибокого розуміння фізичного механізму досліджуваного процесу. Характерною особливістю аналізу розмірностей є те, що він не вимагає залучення основних рівнянь задачі. Крім того, часто виникає ситуація, коли рівняння відомі, проте аналітичне їх дослідження нашкоджується на непереборні математичні труднощі. У таких випадках головну роль відіграють експериментальні методи дослідження, які дозволяють встановити найпростіші факти і записати їх у вигляді деяких математичних співвідношень. Для правильної постановки експериментів і узагальнення одержаних результатів на випадки, коли експеримент безпосередньо не проводився, необхідно вміти складати безрозмірні комплекси із величин, які суттєві для процесу і які для подібних явищ залишаються незмінними. Можливість такого попереднього теоретичного аналізу якраз і забезпечує теорія розмірностей.

Перш ніж перейти до предметного вивчення теорії розмірності потрібно з'ясувати, що таке взагалі є *розмірність*. Поняття розмірності нерозривно пов'язане з одиницями виміру. Під *одиницею виміру* слід розуміти міру, за допомогою якої отримують свої значення фізичні чи геометричні характеристики системи, тобто це масштаб, у долях частин якого вимірюється відповідна величина. Прикладами одиниць виміру можуть слугувати метр та фунт у випадку виміру лінійних розмірів, градус за Цельсієм та градус за Кельвіном у випадку температури, секунди та хвилини у випадку часу і т.д. Іноді замість того, щоб казати, що довжина вимірюється у метрах, а температура в градусах, кажуть, що розмірність довжини є метри, а температури — градуси.

Аналогічні вислови можна застосовувати і до будь-якої іншої одиниці виміру.

Виникає питання: розмірності є абсолютними чи відносними за своєю суттю? Відповідь на це запитання може бути такою: звичайно, розмірності — це відносні величини. Адже з таким самим успіхом ми можемо вимірювати довжину не в метрах, а в метрах квадратних, вважаючи за одиницю виміру сторону чи діагональ квадрата, площа якого складає один квадратний метр. Але нам значно простіше порівнювати між собою величини однієї природи. Тому довжини ми міряємо у долях еталонної довжини, значення якої прийнято вважати за один метр.

Робочі операції виміру повинні бути такими, щоб фізичні співвідношення, які виконуються для величин, виміряних у одних одиницях, мали місце і для величин, виміряних у будь-яких інших одиницях. Це буде виконуватися, якщо значення величини, отримане в результаті виміру, буде обернено пропорційне величині одиниці виміру. Величини, числове значення яких залежить від вибору масштабів, тобто від вибору системи одиниць виміру, називаються *розмірними величинами*. Якщо числове значення величини не залежить від системи одиниць виміру, то така величина називається *безрозмірною*. Прикладами розмірних величин можуть слугувати довжина, час, сила, швидкість і т.д. Безрозмірними величинами можна вважати кути, деформації, відношення двох однойменних величин.

Поділ величин на розмірні та безрозмірні є в деякій мірі умовним. Наприклад, кути нами було віднесено до безрозмірних величин. Проте відомо, що кути можна вимірювати як у радіанах, відносячи довжину відповідної дуги кола до його радіуса, так і в градусах або градах — рівних частинах прямого кута. Але оскільки в усіх системах виміру (системах одиниць виміру) використовують в якості основної одиниці виміру кутів радіани, то кути дійсно можна вважати безрозмірною величиною. Так само, якщо б в усіх системах виміру була вибрана одна й та ж одиниця виміру довжини, то довжина теж була би безрозмірною величиною. Проте в різних системах існують різні одиниці для виміру довжини, що пояснюється тим фактом, що подібні фігури мають рівні кути, але не завжди

рівні розміри сторін. Отже довжина є розмірною величиною.

Тиск звичайно розглядають як розмірну величину і вимірюють його в Паскалях ( $1\text{Па}=1\text{Н/м}^2$ ) або в  $\text{кГ/см}^2$ . З іншого боку, в багатьох задачах зустрічається у вигляді параметру атмосферний тиск, тобто тиск стовпа повітря на рівні поверхні моря ( $10^5\text{Па}$ ). Цей параметр можна використати у якості еталона і вимірювати тиск у частинах від атмосферного тиску, тобто в атмосферах (*ат*). Тиск виміряний у атмосферах є безрозмірною величиною, бо його значення не залежить від системи одиниць виміру.

Таким чином, поняття розмірних та безрозмірних величин є відносними. При побудові системи виміру вводиться деякий запас одиниць виміру. Тоді величини, для яких одиниці виміру однакові в усіх системах виміру, будуть безрозмірними. Відповідно всі інші величини будуть розмірними.

Різні фізичні величини пов'язані між собою певними співвідношеннями. Тому ми не можемо всі одиниці виміру вибирати незалежними. Якщо деякі з них ми виберемо незалежними, то одиниці виміру для інших можна буде побудувати на їх основі. Величини, одиниці виміру яких вибираються незалежно, називаються *основними* або *первинними* величинами. Інші отримали назву *похідних* або *вторинних* величин.

При вивченні механічних явищ достатньо вибрати незалежними лише три одиниці виміру. Як правило, це одиниці, які відповідають трьом основним філософським категоріям — простору, часу та матерії, тобто одиниці довжини  $[l]=L$ , часу  $[t]=T$  та маси  $[m]=M$ . Інколи за незалежні одиниці зручно взяти одиниці довжини, часу та сили. Звичайно, в якості основних одиниць можна вибирати і інші.

В задачах електромеханіки до одиниць виміру часу, довжини та маси додають ще одиниці виміру сили струму  $[i]=I$ . В задачах пов'язаних з процесами теплообміну до основних одиниць додають одиниці виміру температури  $[k]=K$ .

Розподіл величин на основні та похідні необхідним чином призводить до виникнення ще одного поняття — розмірності. Під *розмірністю* слід розуміти

вираз для похідної одиниці виміру через основні одиниці виміру.

Далі розмірність величини  $x$  будемо позначати квадратними дужками:  $[x]$ .

Наприклад, одиниця швидкості визначиться таким чином:

$$[v] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1},$$

де  $L, T$  — відповідно розмірності одиниць довжини і часу.

Визначальним рівнянням одиниці сили є другий закон Ньютона:

$$F = ma; [F] = [m] \cdot [a] = MLT^{-2}.$$

Розмірність одиниці роботи:

$$[A] = [F] \cdot [l] = ML^2T^{-2}$$

В основу застосування аналізу розмірностей покладено  $\pi$ -теорему подібності, яка формулюється таким чином:

*Якщо існує однорідна відносно розмірностей залежність, що повністю описує процес або явище, у такому вигляді:  $\varphi(y, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) = 0$ , яка зв'язує  $n$  фізичних величин за допомогою  $k$  основних одиниць, то ця залежність завжди може бути подана як залежність між  $(n-k)$  безрозмірними комбінаціями, утвореними з цих величин,  $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-k}) = 0$ .*

Тут використано поняття однорідної відносно розмірностей залежності, під якою розуміють рівняння, форма якого не залежить від вибору основних одиниць вимірювання. Наприклад, запис другого закону Ньютона не залежить від вибору одиниць виміру маси рухомого тіла.

## **2. Приклад застосування методу аналізу розмірностей фізичних величин**

Метод розглянемо на прикладі вдосконалення плану експериментального дослідження безконтактного контролю плоских деталей за допомогою пневматичного вимірювального приладу (рис. 1, в).

У вимірювальну камеру приладу через вхідний дросель із прохідним діаметром  $d_2$  надходить стиснене повітря під тиском  $p_0$ . Стиснене повітря виходить через кільцевий зазор висотою  $h$ , що утворюється між вихідним дроселем з діаметром  $d_1$ , та вимірюваною деталлю. Тиск на вході у прилад  $p_0$

підтримується постійним, а тиск у вимірювальній камері  $p_1$  залежатиме від висоти кільцевого зазору  $h$ . Тиск  $p_1$  вимірюють і за його значенням роблять висновок про відстань від поверхні деталі до вихідного дроселя  $h$ , а отже, про товщину деталі.

Експериментальне дослідження приладу передбачає вивчення впливу на тиск у вимірювальній камері  $p_1$  постійного входного тиску  $p_0$ , діаметрів входного  $d_2$  і вихідного  $d_1$  дроселів, а також відстані  $h$  між вихідним дроселем та деталлю (рис. 1, а). Очевидно, вважається, що повітря є нестисливим, тертя повітряних струменів у приладі відсутнє, інерційні сили при вимірюванні також відсутні.

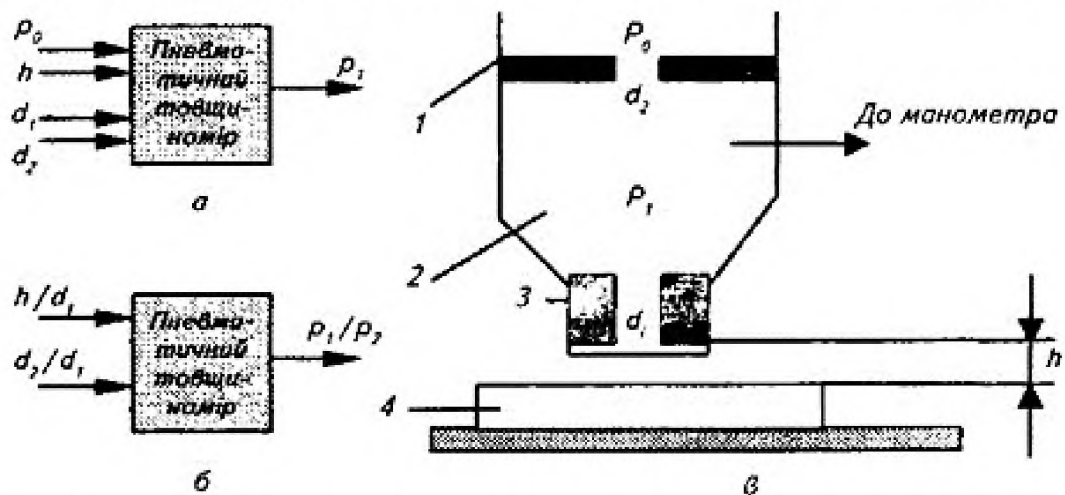


Рис. 1. Вихідна (а) і вдосконалена (б) схеми експерименту та конструкція товщиноміра (в): 1 — входний дросель, 2 — вимірювальна камера, 3 — вихідний дросель, 4 — деталь

Залежність між цими змінними невідома, тому запишемо її у загальній формі як  $p_1 = \varphi(p_0, h, d_1, d_2)$ .

У найбільш загальному випадку між цими змінними існуватиме співвідношення

$$p_1 = \varphi(p_0^a, h^b, d_1^c, d_2^d).$$

Розмірність усіх змінних вихідної залежності може бути виражена за допомогою трьох основних одиниць: маси  $M$ , довжини  $L$  та часу  $T$  (табл. 1).



Таблиця 1. Позначення та розмірності змінних у формулі визначення тиску у вимірювальній камері

№	Змінна	Позначення	Розмірність
1.	Тиск у вимірювальній камері	$p_1$	$ML^{-1}T^{-2}$
2.	Вхідний постійний тиск	$p_0$	$ML^{-1}T^{-2}$
3.	Діаметр вимірювального дроселя	$d_1$	$L$
4.	Діаметр вхідного дроселя	$d_2$	$L$
5.	Відстань від дроселя до деталі	$h$	$L$

Підставимо у вихідну залежність замість змінних їх розмірності

$$ML^{-1}T^{-2} = \varphi[(ML^{-1}T^{-2})^a, L^b, L^c, L^d]$$

Якщо до цього виразу висунути вимогу однорідності відносно розмірностей, як у  $\pi$  - теоремі, то показники степеня в лівій та правій частинах повинні бути рівні. Тоді отримаємо

$$\text{для } M: \quad 1 = a$$

$$\text{для } L: \quad -1 = -a + b + c + d$$

$$\text{для } T: \quad -2 = -2a$$

Ми отримали три рівняння із чотирма невідомими. Виключимо із системи рівнянь величини  $a$  і  $c$ . Тоді

$$1 = a; \quad c = -b - d; \quad 1 = a.$$

Підставивши отримані величини у вихідну залежність, запишемо

$$p_1 = \varphi(p_0^1, h^b, d_1^{-b-d}, d_2^d).$$

Об'єднаємо члени із однаковими показниками степеня, що дасть змогу перейти до безрозмірних комбінацій змінних:

$$\frac{p_1}{p_0} = \varphi\left(\frac{h}{d_1}, \frac{d_2}{d_1}\right).$$

Такий перехід дав змогу спростити експериментальне дослідження, оскільки замість п'яти вихідних змінних в експериментальному дослідженні братимуть участь лише три безрозмірні комбінації цих величин (рис. 1, б). При цьому значно спрощується графічне представлення експериментальних даних (рис. 2).

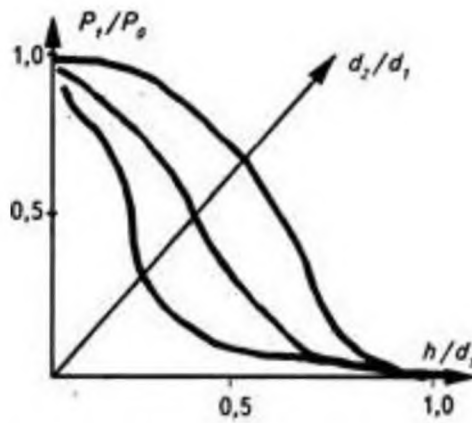


Рис. 2. Результати дослідження

Оцінимо отриманий результат, провівши теоретичний аналіз процесу функціонування пневматичного вимірювального пристрою при допущенні про нестисливість повітря. Витрати повітря через сопло обчислимо за формулою

$$Q = f \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}},$$

де  $f$ — площа сопла;  $\rho$  — густина повітря.

Тоді об'єм повітря, що зайшло у вимірювальну камеру через вхідний дросель, дорівнюватиме об'єму повітря, що вийшло через кільцеву щілину вихідного дроселя, тобто

$$\frac{\pi d_2^2}{4} \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}} = \pi d_1 \cdot h \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}},$$

або після перетворень і скорочень отримаємо:

$$\left(\frac{\pi d_2^2}{4}\right)^2 \frac{2(p_0 - p_1)}{\rho} = (\pi d_1 \cdot h)^2 \frac{2p_1}{\rho},$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1 + 16 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \left(\frac{h}{d_1}\right)}.$$

Залежність, отримана шляхом теоретичного аналізу процесу функціонування пневматичного товщиноміра, містить такі самі безрозмірні комбінації змінних величин, які отримані шляхом аналізу розмірностей.

Безсумнівною перевагою аналізу розмірностей є можливість його застосування в умовах невідомої залежності між змінними величинами, що

описують досліджуваний процес чи явище. Врахуємо тепер, наприклад, властивість повітря стискатися при вимірюванні. З цією метою доповнимо змінні, що описують процес, такими параметрами, як густина повітря  $\rho$  та прискорення Землі  $g$ . Тоді

$$p_1 = \varphi(p_0^a, h^b, d_1^c, d_2^d, g^e, \rho^f).$$

Підставимо замість цих змінних їх розмірності:

$$ML^{-1}T^{-2} = \varphi[(ML^{-1}T^{-2})^a, L^b, L^c, L^d, (LT^{-2})^e, (ML^{-3})^f]$$

Із умови однорідності відносно розмірностей по основних величинах  $M, L, T$  отримаємо відповідно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = a + f \\ -1 = -a + b + c + d + e - 3f \\ -2 = 2a - 2e \end{cases}$$

Розв'яжемо її відносно  $a, c, e$ :

$$a = 1 - f; e = 1 + a = f; c = f - b - d.$$

Підставляємо ці значення у вихідну залежність, що модифікує її таким чином:

$$p_1 = \varphi(p_0^{1-f}, h^b, d_1^{f-b-d}, d_2^d, g^f, \rho^f).$$

Об'єднавши змінні з однаковими показниками, матимемо такі комбінації безрозмірних величин:

$$\frac{p_1}{p_0} = \varphi\left(\frac{h}{d_1}, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_1 \rho g}{p_0}\right),$$

серед яких стисливість повітря враховується безрозмірною комбінацією  $\frac{d_1 \rho g}{p_0}$ .

Таким чином, застосування методів аналізу розмірностей для дослідження процесів, що проходять у технологічних системах, створює передумови для суттєвого спрощення як об'ємів експериментальних досліджень, так і робіт з обробки їх результатів.

### Варіанти завдань

#### Варіант 1.

Сила опору тертя  $F_{\text{тр}}$  тонкої прямокутної пластини, що обтікається потоком рідини, залежить від площі бокових поверхонь пластини  $w$ , густини  $\rho$  та

швидкості  $v$  рідини, прискорення вільного падіння  $g$ :  $F_{\text{тр}} = f(w, \rho, v, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[F_{\text{тр}}] = \text{MLT}^{-2}$ ;  $[w] = L^2$ ;  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ ;  $[g] = \text{LT}^{-2}$ ;  $[v] = \text{LT}^{-1}$ .

#### Варіант 2.

Пластина площею  $S$  рухається відносно нерухомої пласкої поверхні, яку намочено рідиною, із швидкістю  $v$ . Товщина шару  $h$ , в'язкість  $\mu$ . Зусилля, яке прикладене до пластини, визначається функцією виду  $F = f(S, v, h, \mu)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[F] = \text{MLT}^{-2}$ ,  $[S] = L^2$ ,  $[v] = \text{LT}^{-1}$ ,  $[h] = L$ ;  $[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ .

#### Варіант 3.

До мотузки довжиною  $R$ , один кінець якої закріплений на нерухомій точці, прив'язаний камінь масою  $m$ . Камінь обертається зі швидкістю  $v$ . Прискорення вільного падіння дорівнює  $g$ , а сила натягування ланцюга, яка визначається в досліді -  $F = f(R, m, v, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[F] = \text{MLT}^{-2}$ ;  $[R] = L$ ;  $[m] = M$ ;  $[v] = \text{LT}^{-1}$ ;  $[g] = \text{LT}^{-2}$ .

#### Варіант 4.

Витрата води  $Q$  через циліндричний насадок залежить від його діаметра  $d$ , діаметра трубопроводу  $D$ , напора перед насадком  $H$  та прискорення вільного падіння  $g$ :  $Q = f(d, D, H, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[Q] = L^3\text{T}^{-1}$ ,  $[d] = L$ ;  $[D] = L$ ;  $[H] = L$ ;  $[g] = \text{LT}^{-2}$ .

#### Варіант 5.

Потужність на валу насоса  $N$  залежить від напору  $H$ , який створює насос, подачі  $Q$ , густини рідини  $\rho$ , прискорення вільного падіння  $g$ :  $N = f(H, Q, \rho, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[N] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}$ ;  $[H] = L$ ;  $[Q] = L^3\text{T}^{-1}$ ;  $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ ;  $[g] = \text{LT}^{-2}$ .

### Варіант 6.

Час  $t$  процесу спорожнення вертикального циліндричного бака залежить від діаметра  $D$  бака, рівня  $H$  рідини, діаметра отвору  $d$  у дні бака, прискорення вільного падіння  $g$ :  $t=f(D,H,d,g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[t]=T$ ;  $[D]=L$ ;  $[H]=L$ ;  $[d]=L$ ;  $[g]=LT^{-2}$ .

### Варіант 7

Кількість тепла за одиницю часу  $q$ , що віддається тілом, що поміщене в рідину залежить від його лінійного розміру  $L$ , перепаду температури  $T$ , питомої теплоємності  $c$  і коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$ :  $q=f(d, T, c, \lambda)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[l]=L$ ;  $[T]=ML^2T^{-2}$ ;  $[c]=ML^{-3}$ ;  $[\lambda]=L^{-1}T^{-1}$

### Варіант 8

Прогин  $y$  консольно закріпленої балки довжиною  $l$ , на кінці якої закріплений вантаж  $m$  залежить від модуля пружності матеріалу балки  $E$  та моменту інерції її поперечного перерізу  $I$ , а також прискорення вільного падіння  $g$ :  $y=f(l, m, E, I, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[l]=L$ ;  $[m]=M$ ;  $[E]=MT^{-2}L^{-1}$ ;  $[I]=L^4$ ;  $[g]=LT^{-2}$

### Варіант 9

Сила опору корабля  $F$ , масою  $m$ , що рухається з швидкістю  $V$  також залежить від його лінійного розміру  $l$ , прискорення вільного падіння  $g$ , густини рідини  $\rho$ , в'язкості повітря  $\mu$ :  $F=f(m, V, l, g, \rho, \mu)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірностей фізичних величин мають вигляд:  $[F]=MLT^{-2}$ ;  $[m]=M$ ;  $[V]=LT^{-1}$ ;  $[l]=L$ ;  $[g]=LT^{-2}$ ;  $[\rho]=ML^{-3}$ ;  $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$

### Варіант 10

Максимальна дальність польоту кулі  $a$ , випущеної із пістолета залежить від її маси  $m$ , початкової швидкості  $V$  висоти, на якій вона випущена  $h$ , прискорення

вільного падіння  $g$ , в'язкості повітря  $\mu$  та її лінійного розміру  $D$ :  $a = f(m, V, h, g, \mu, D)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірності фізичних величин мають вигляд:  $[a] = L$ ;  $[m] = M$ ;  $[V] = LT^{-1}$ ;  $[h] = L$ ;  $[g] = LT^{-2}$ ;  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ ;  $[D] = L$ .

### **Приклад розв'язання задачі.**

Розхід рідини  $Q$  через прямокутний водозлив є функцією густини  $\rho$ , в'язкості рідини  $\mu$ , висоти  $h$  води над порогом, ширини  $b$  порогу та прискорення вільного падіння  $g$ :  $Q = f(\rho, \mu, h, b, g)$ . Знайти безрозмірні комбінації, якими описують процес, якщо формули розмірності фізичних величин мають вигляд:  $[Q] = L^3T^{-1}$ ;  $[\rho] = ML^{-3}$ ,  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ ;  $[h] = L$ ;  $[b] = L$ ;  $[g] = LT^{-2}$

### **Розв'язання:**

Упорядкування фундаментальних величин виконано у вигляді табл. 2, де вказане позначення величини, її розмірність у системі СВ, формула розмірності, показник ступеню для подальших розрахунків (табл.2.1.1).

Таблиця 2 – Вихідні данні для розрахунку критеріїв подібності

Фундаментальні величини	Розмірність	Формула розмірності	Показник степеню
$Q$	$m^3/год$	$[L]^3[T]^{-1}$	$a$
$\rho$	$кг/м^3$	$[M][L]^{-3}$	$b$
$\mu$	$кг/м \cdot с$	$[M][L]^{-1}[T]^{-1}$	$c$
$h$	$м$	$[L]$	$d$
$b$	$м$	$[L]$	$e$
$g$	$м/с^2$	$[L][T]^{-2}$	$f$

Оскільки у наведеному прикладі  $n=6$ , а  $k=3$ , згідно  $\pi$ -теорему повинно бути  $6 - 3 = 3$  критеріїв подібності.

Однорідне відносно розмірностей рівняння необхідно відобразити у вигляді показникової функції від фундаментальних змінних.

$$\phi\{[Q]^a, [\rho]^b, [\mu]^c, [h]^d, [b]^e, [g]^f\} = 0$$

$$\phi\{[L]^3[T]^{-1}]^a, [[M][L]^{-3}]^b, [[M][L]^{-1}[T]^{-1}]^c, [L]^d, [L]^e, [[L][T]^{-2}]^f\} = 0$$

Для того, щоб розмірність правої та лівої частин наведеного рівняння була однаковою, та вираз був однорідним відносно розмірності, повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} [M] \rightarrow b + c = 0; & (1) \\ [L] \rightarrow 3a - 3b - c + d + e + f = 0; & (2) \\ [T] \rightarrow -a - c - 2f = 0. & (3) \end{cases}$$

Іншими словами, отримали систему трьох рівнянь із шістьма невідомими. Для отримання трьох безрозмірних комбінацій необхідно виключити три невідомих. Від того, які змінні виключаються, залежить вигляд безрозмірних комбінацій. Будь-які комбінації формально будуть правильними. Однак не всі з них мають фізичний зміст. Тому рішення задачі іноді треба повторювати.

$$\text{Із (1):} \quad c = -b \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3):

$$\begin{aligned} -a + b - 2f &= 0 \\ a &= b - 2f \end{aligned} \quad (5)$$

Підставимо (4,5) в (2):

$$3(b - 2f) - 3b + b + d + e + f = 0 \quad (6)$$

$$d = 5f - e - b \quad (7)$$

Таким чином, якщо підставити замість невідомих  $a, c, d$  їх значення згідно виразів (5), (7), (4) відповідно, вихідне рівняння перетворюється до виду:

$$\phi\{[Q]^{b-2f}, [\rho]^b, [\mu]^{-b}, [h]^{5f-b-e}, [b]^e, [g]^f\} = 0$$

### **Відповідь**

Виконавши групування величин із однаковими показниками степені, отримаємо три безрозмірних критерії.

$$\left(\frac{Q\rho}{\mu h}\right)^b, \left(\frac{h^5 g}{Q^2}\right)^f, \left(\frac{b}{h}\right)^e.$$

### **Зміст звіту**

1. Титульна сторінка
2. Зміст задачі згідно варіанту
3. Розв'язок задачі

**Міністерство освіти і науки України**  
**Тернопільський національний технічний університет**  
**імені Івана Пулюя**

***Кафедра*** конструювання  
верстатів інструментів та машин

***ЗВІТ***

*з практичної роботи № 1*

на тему:

**" Моделювання технічних систем методом аналізу розмірностей  
фізичних величин "**

*Роботу виконав :*

*ст. гр.* \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

*Роботу прийняв :*

\_\_\_\_\_

Тернопіль, 2016



### **Контрольні питання**

1. В яких випадках доцільно використовувати метод аналізу розмірностей фізичних величин?
2. Якою є достатня умова для використання методу розмірностей?
3. Вкажіть порядок моделювання за методом аналізу розмірностей.
4. Поясніть терміни «розмірність», «одиниця виміру».
5. Поясніть поняття абсолютності та відносності вимірюваних величин.
6. Поясніть поняття розмірних та безрозмірних величин. Наведіть приклади.
7. Поясніть поняття первинних та вторинних величин.
8. Які одиниці виміру використовуються найчастіше і як вони позначаються в теорії розмірностей?
9. Вкажіть розмірності для швидкості, сили та роботи в первинних величинах.
10. Що таке  $\pi$ -теорема подібності і яка її суть?

### **Список використаної літератури**

- 1 Пальчевський П.О. Дослідження технологічних систем: Моделювання. Проектування. Оптимізація: Навч. пос. / Пальчевський П.О. –Львів: Світ, 2001. – 232с.
2. Гайдучок В. М. Теорія і технологія наукових досліджень: навч. посіб. / Гайдучок В. М., Затхей Б. І., Лінник М. К. – Львів: Афіша, 2006. – 232 с
3. Кепич Т.Ю. Основи теорії подібності та аналізу розмірностей та їх застосування в задачах механіки / Кепич Т.Ю., Куценко О.Г. К.: Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка, 2004. — 100 с.
4. Методичні вказівки до самостійної роботи з нормативної навчальної дисципліни професійної та практичної підготовки «Теорія технічних систем» (для студентів напрямку підготовки 6.050503 «Машинобудування»). / Укладачі: Вірич С.О., Бабенко М.О., Подгородецький М.С., Горячева Т.В., Лаппо І.М.,— Красноармійськ, Видавництво Красноармійського індустріального

інституту, 2012. – 25 с.

5. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике [изд. 8-е, перераб.] / Л. И. Седов. – Глав. ред. физ-мат. литературы издательства «Наука», М.: 1977, – 440 с.

6. Кузнецов Ю. М. Теорія технічних систем / Кузнецов Ю. М., Новосьолов Ю. К., Луців І. В. – Севастополь : СевНТУ, 2011. – 245с.

7. Кузнецов Ю. М. Теорія технічних систем / Ю. М. Кузнецов, І. В. Луців, С. А. Дубиняк. – К. ; Тернопіль, 1997. – 310 с.

**ДЛЯ НОТАТОК**